22 maja 2015 r.

„Galilean Electrodynamics”

Nierelatywistyczne przybliżenia elektrodynamiki klasycznej

Seminarium IF WIMiM ZUT

Dlaczego elektrodynamika klasyczna NIE JEST niezmiennicza względem transformacji Galileusza?

- Parametr *c* występuje jawnie w równaniach Maxwella
- *c* to prędkość światła
- Prędkość jest względna $v' = v - v_0$ (transformacja Galileusza)
- Czy zatem w równaniach Maxwella $c' = c - v_0$?
- Doświadczenie: NIE! Zawsze jest c!
- Czy to jest właściwy argument za tym, że równania Maxwella NIE SĄ niezmiennicze względem Galileusza?

Hmmm… No nie jest!

… DLACZEGO NIE?

Parametr *c* w równaniach Maxwella jest właściwie własnością pustej przestrzeni w sensie czysto newtonowskim:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

$$\varepsilon_0 = \left(8.81 \times 10^{-12} \pm 1\%\right)\ \mathrm{F\,m^{-1}}$$
$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{7}\ \ \mathrm{N\,A^{-2}}$$

Obie wielkości ε_0 i μ_0 charakteryzują newtonowską próżnię

Są to niezależne od obserwatora skalary.

Zatem:

c jest niezmienniczym skalarem w fizyce przedrelatywistycznej!

Dlaczego więc równania Maxwella nie są galileuszowsko niezmiennicze?
Czy wszystkie nie są? Czy są takie, co są niezmiennicze?
Jak XIX-wieczny fizyk by to pokazał?

Transformacja Galileusza:

$t' = t + a,$ $\mathbf{x}' = R\mathbf{x} - \mathbf{v}_0 t + \mathbf{b}$ (ogólnie)

$t' = t,$ $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}_0 t$ („zwyczajne”)

definicje prędkości: $\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}, \qquad \mathbf{v}' = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}'}{\mathrm{d}t'}$

transformacja prędkości: $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0$

Trochę pochodnych:

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial t}{\partial t'}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x^i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial t} + v_0^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial t}{\partial x'^i}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Ważny wynik:

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla, \qquad \nabla' = \nabla$$

Co ma do dyspozycji XIX-wieczny fizyk?

1) Prawo zachowania ładunku

w połączeniu z transformacją Galileusza prowadzi do transformacji gęstości ładunku i prądów:

$$\varrho' = \varrho \qquad \mathbf{j}' = \mathbf{j} - \varrho \mathbf{v}_0$$

gdzie oczywiście: $\mathbf{j} \equiv \varrho \mathbf{v}$

2) Równania Maxwella

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0},$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

3) XIX w. fizyk mógł też słusznie przypuszczać, że siła Lorentza jest niezmiennicza

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

To przypuszczenie prowadzi do następującej transformacji pól:

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{E}' + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{E}' + \mathbf{v} \times (\mathbf{B}' - \mathbf{B}) = \mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}'$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{B}'(\mathbf{x}', t') = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$$

$$\mathbf{E}'(\mathbf{x}', t') = \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$$

Za pomocą uzyskanych transformacji pól, gęstości ładunku oraz prądów sprawdzamy niezmienniczość poszczególnych równań Maxwella

1) Magnetyczne prawo Gaussa:

$$\nabla' \cdot \mathbf{B}' = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

jest niezmiennicze

2) Prawo Faradaya:

$$\nabla' \times \mathbf{E}' + \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} = \left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) + \nabla \times (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}) + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\mathbf{B}$$
$$= \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0.$$

≥

jest niezmiennicze

3) Prawo Gaussa:

$$\nabla' \cdot \mathbf{E}' - \frac{\varrho'}{\varepsilon_0} = \left(\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \right) \underbrace{- \mathbf{v}_0 \cdot (\nabla \times \mathbf{B})}_{\text{niepożądany wyraz}}$$

nie jest niezmiennicze!

4) Prawo Ampere'a:

$$\nabla' \times \mathbf{B}' - \mu_0 \mathbf{j}' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'} = \left(\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{j} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$
$$\underbrace{+ \mu_0 \varrho \mathbf{v}_0 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\mathbf{E} - \frac{\mathbf{v}_0}{c^2} \times \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \right) \mathbf{B} \right]}_{\text{niepożądany wyraz}}$$

nie jest niezmiennicze!

Ciekawostka:

Prawo zachowania ładunku:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$$

można wyprowadzić z równań Maxwella, mianowicie z prawa Gaussa i z prawa Ampere'a, które NIE SĄ niezmiennicze względem transformacji Galileusza.

Mogłoby się więc wydawać, że prawo zachowania ładunku nie będzie niezmiennicze względem transformacji Galileusza.

Łatwo jednak pokazać, manipulując równaniami, że w primowanym układzie odniesienia JEST spełnione równanie:

$$\begin{aligned}
\nabla' \cdot \mathbf{j}' &= [\varepsilon_0 \nabla \cdot (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\mathbf{E} - \nabla \cdot (\varrho \mathbf{v}_0)] - \varepsilon_0 \nabla' \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t'}(\mathbf{E}' - \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}')\right] \\
&= [(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)(\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \varrho] - \frac{\partial}{\partial t'}\{\varepsilon_0[\nabla' \cdot \mathbf{E}' + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla' \times \mathbf{B}']\} \\
&= -\frac{\partial \varrho'}{\partial t'}.
\end{aligned}$$

Niezmienniczość okazuje się nietrywialną sprawą

Czy zastosowanie przed-maxwellowskiej formy równań pola (tzn. z pominiętym prądem przesunięcia) może poprawić sytuację jeśli chodzi o niezmienniczość względem transformacji Galileusza?

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0},$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}.$$

Okazuje się, że NIE.

Równania Maxwella w przed-maxwellowskiej postaci również nie są galileuszowsko niezmiennicze.

Transformacja Lorentza i jej limity nierelatywistyczne

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \gamma\frac{\boldsymbol{v}}{c}ct + (\gamma - 1)\frac{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{x})}{\boldsymbol{v}^2}, \quad ct' = \gamma\left[ct - \frac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot\mathbf{x}\right]$$ $\Longleftarrow$ transformacja Lorentza $\gamma = (1 - \boldsymbol{v}^2/c^2)^{-1/2}$

Granice nierelatywistyczne:

A) skrajnie-czasopodobna (ultra-timelike)

$|\boldsymbol{v}| \ll c$ $\quad ct \gg |\mathbf{x}|$ $\quad \Longrightarrow \quad$ $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \boldsymbol{v}t, \quad t' = t$

B) skrajnie-przestrzeniopodobna (ultra-spacelike)

$|\boldsymbol{v}| \ll c$ $\quad ct \ll |\mathbf{x}|$ $\quad \Longrightarrow \quad$ $\mathbf{x}' = \mathbf{x}, \quad t' = t - \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{x}$

„Carroll transformation”

C) „natychmiastowa” (instantaneous limit)

$c \to \infty$ $\quad \Longrightarrow \quad$ $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \boldsymbol{v}t, \quad t' = t$

Zauważmy, że $\lim_{c\to\infty}|\boldsymbol{v}|/c = 0$ spełnione jest tu dla DOWOLNEGO *v* !

Podwójna rola *c*

C_u $\Longrightarrow$ $F = \left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)\frac{q^2}{R^2}$ $\frac{dF}{dl} = \left(\frac{\beta\chi}{4\pi}\right)\frac{2I^2}{R}$

Stałe α β χ zależą od wyboru jednostek

$$\Downarrow$$

$$\frac{\alpha}{\beta\chi} = c_u^2$$

C_u – ma wymiar „prędkość do kwadratu”

Co to za tajemnicza prędkość?

W układzie SI wybieramy:

$\beta = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$ $\chi = 1$ $\alpha = 1/\epsilon_0$

z eksperymentu: $\epsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\,\mathrm{N/m}$

Co daje: $c_u = 2.9986 \times 10^5\,\mathrm{km/s}$

Czy c_u to c?!

Zauważmy, że c_u otrzymujemy ze wzorów typu „action-at-a-distance”!

Action-at-a-distance „równania Maxwella”:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \alpha\rho$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = 0,$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$
$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \beta \mathbf{J}.$$

Są to równania „statyczne” plus „prąd przesunięcia”, który został dodany by spełnić równanie ciągłości dla ładunku – nie zmienia to faktu, że są to równania typu „działanie na odległość”

Z tych równań:

$$\nabla^2 \mathbf{B} + \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbf{E} = -\beta \nabla \times \mathbf{J}$$

Ale… byłoby to równanie falowe dla propagacji pola B z prędkością *c*:

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\beta \nabla \times \mathbf{J}$$

gdybyśmy poprawili drugie z tych „równań Maxwella”:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\alpha}{\beta c^2}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Prawo indukcji Faradaya

Pełne równania Maxwella:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \alpha\rho,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\alpha}{\beta c^2}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \beta \mathbf{J}.$$

Prawo Faradaya jest jedynym, które zawiera „prędkość propagacji” c !

$$\Uparrow$$

Postać równań jest niezależna od wyboru jednostek

Stosujcie, co chcecie $\Longrightarrow$

System	α	β	χ
Gaussian	4π	$4\pi/c_u$	$1/c_u$
SI	$1/\epsilon_0$	μ_0	1
HL	1	$1/c_u$	$1/c_u$

TABLE I: The $\alpha\beta\chi$-system of units.

Kilka postaci prawa Faradaya:

Ponieważ $\alpha/\beta = \chi c_u^2$ to:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \chi \frac{c_u^2}{c^2}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

W układzie SI: $\chi = 1$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{c_u^2}{c^2}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

Eksperyment pokazuje, że zachodzi numeryczna równość: $c_u = c$

$\Uparrow$

Prawo Faradaya w układzie SI: $$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

„zasada równoważności”

- w analogii do $m_i = m_g$

Ale czy numeryczna zgodność oznacza fizyczną równoważność?

„Galilean Electrodynamics"

START: Relatywistyczne transformacje pól, gęstości ładunku i prądów:

$$\mathbf{E}' = \gamma\left[\mathbf{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \frac{\alpha}{\beta c}\mathbf{B}\right] + (\gamma - 1)\frac{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{E})}{\boldsymbol{v}^2},$$

$$\frac{\alpha}{\beta c}\mathbf{B}' = \gamma\left[\frac{\alpha}{\beta c}\mathbf{B} - \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \mathbf{E}\right] + (\gamma - 1)\frac{\boldsymbol{v}[\boldsymbol{v}\cdot\alpha\mathbf{B}/(\beta c)]}{\boldsymbol{v}^2},$$

$$c\rho' = \gamma\left[c\rho - \frac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot\mathbf{J}\right], \quad \mathbf{J}' = \mathbf{J} - \gamma\frac{\boldsymbol{v}}{c}c\rho + (\gamma - 1)\frac{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{J})}{\boldsymbol{v}^2}$$

PYTANIE: Jaka jest nierelatywistyczna granica równań Maxwell?

Przez nierelatywistyczną granicę będziemy rozumieli postać tak odpowiednio zmodyfikowanych równań Maxwella by były one NIEZMIENNICZE względem TRANSFORMACJI GALILEUSZA

Wiemy już, że przy transformacji Galileusza:

$$\boldsymbol{\nabla}' = \boldsymbol{\nabla}, \quad \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}$$

Jak jednak przekształcają się pola? ($|v| \ll c$)

ODPOWIEDŹ: Są dwie różne sensowne granice: elektryczna i magnetyczna

Granica elektryczna

$$|\mathbf{E}| \gg \frac{\alpha}{\beta c}|\mathbf{B}|, \quad c|\rho| \gg |\mathbf{J}|$$

$$\Uparrow$$

Pole E „dominuje" nad polem B oraz gęstość ładunku nad gęstością prądu

$$\Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}' &= \mathbf{E},\\
\mathbf{B}' &= \mathbf{B} - \frac{\beta}{\alpha}\boldsymbol{v} \times \mathbf{E},\\
\rho' &= \rho,\\
\mathbf{J}' &= \mathbf{J} - \boldsymbol{v}\rho.
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

Równania są niezmiennicze względem przekształceń Galileusza

$$\Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} &= \alpha\rho,\\
\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} &= 0,\\
\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} &= 0,\\
\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} - \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \beta\mathbf{J}.
\end{aligned}$$

Granica magnetyczna

$$|\mathbf{E}| \ll \frac{\alpha}{\beta c}|\mathbf{B}|, \quad c|\rho| \ll |\mathbf{J}|$$

$$\Longrightarrow$$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{\alpha}{\beta c^2}\boldsymbol{v} \times \mathbf{B},$$
$$\mathbf{B}' = \mathbf{B},$$
$$\rho' = \rho - \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{J},$$
$$\mathbf{J}' = \mathbf{J}.$$

Taką samą transformację uzyskaliśmy poprzednio z założenia o niezmienniczości siły Lorentza!

Pole B „dominuje" nad polem E oraz gęstość prądu nad gęstością ładunku

$$\Downarrow$$

Równania są niezmiennicze względem przekształceń Galileusza.
Są to w gruncie rzeczy równania **magnetohydrodynamiki**. Efekty magnetyczne dominują nad elektrycznymi

$$\Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} &= \alpha\rho, \\
\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} + \frac{\alpha}{\beta c^2}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \\
\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} &= 0, \\
\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} &= \beta \mathbf{J}.
\end{aligned}$$

Czy XIX-wiecznemu fizykowi potrzebna była lorentzowska niezmienniczość?

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \varrho, \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j}, \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$$

Żądamy niezmienniczości siły Loretza względem transformacji Galileusza

$$\boldsymbol{F} = \int \mathrm{d}^3 r \, [\varrho(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})]$$

$$\begin{cases} \varrho' = \varrho, \\ \boldsymbol{j}' = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{v}\varrho \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}, \\ \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{D}' = \boldsymbol{D}, \\ \boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H} - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{D} \end{cases}$$

Jak weźmiemy taką transformację pól, to równania Maxwella na **D**,**E**,**B**,**H** są niezmiennicze względem transformacji Galileusza

XIX-wieczny fizyk mógł więc spać (prawie) spokojnie

Równania Hertza

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad \Longleftarrow \quad \boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

Faraday

$$-\nabla \times \boldsymbol{E}' = \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{B} = \frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$$

Ampere

$$c^2 \nabla \times \boldsymbol{B}' - \frac{\boldsymbol{j}'}{\epsilon_0} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \nabla \times \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{E} = \frac{d\boldsymbol{E}}{dt}$$

Po zastąpieniu pochodnych cząstkowych po czasie pochodnymi substancjalnymi równania Maxwella stają się niezmiennicze względem przekształceń Galileusza!

CENA: brak prawa zachowania ładunku

Jeśli jednak wierzyć artykułowi 5) podobno można to naprawić używając zamiast pochodnych substancjalnych pochodnych Liego.

Literatura

1) Le Bellac M and L´evy-Leblond J-M 1973, Galilean electromagnetism, *Nuovo Cimento B 14 217–34*

2) **Giovanni Preti, Fernando de Felice and Luca Masiero, On the Galilean non-invariance of classical electromagnetism, Eur. J. Phys. 30 (2009) 381–391**

3) J.A. Heras, The Galilean limits of Maxwell's equations, Eur. J. Phys. 31, 1177 (2010)

4) Germain Rousseaux, Forty years of Galilean Electromagnetism (1973–2013), Eur. Phys. J. Plus (2013) 128: 81

5) C. I. Christov, Hidden in Plain View: The Material Invariance of Maxwell-Hertz-Lorentz Electrodynamics, Apeiron, Vol. 13, No. 2, April 2006